Ecuaciones diferenciales

Jorge Urroz

March 28, 2022

Las matemáticas son una herramienta para poder interpretar y analizar la realidad. Se diseñan modelos matemáticos que nos permiten entender un fenómeno determinado y manipularlo en nuestro beneficio. Depende de las características del modelo se utilizan métodos diferentes. Cuando en el fenómeno interviene de forma directa el tiempo, nos interesará saber la variación del fenómeno respecto del tiempo, por ejemplo, si queremos saber la posición de un objeto en caida libre en un instante determinado, o la de un proyectil disparado desde tierra, o quizas el número de individuos de cierta población. Obviamente esto no es mas que una muestra de la enorme cantidad de ejemplos que se pueden analizar de esta forma

0.1 El clavadista

Centrémonos por un momento en la caida libre. Dado que se mueve a gran velocidad, será difícil ver cual es la posición exacta de un clavadista cuando cae al agua desde un precipicio. Sin embargo, quizas es mas sencillo, si nos fijamos en la cantidad de metros que se mueve durante un tiempo determinado. Es decir, determinar la variación de un fenómeno puede ser mas sencillo que saber su tamaño.

El objeto matemático a estudiar es la derivada ya que es justamente la tasa variación por unidad de tiempo. Vamos a ver un ejemplo. Queremos saber la velocidad a la que cae un clavadista que en el instante $t = 0$ salta de un precipicio de 100 metros de altura. En este caso, lo mas sencillo es saber la variación de su velocidad que es su aceleración $g = -9.8m/s^2$. asi pues

$$v'(t) = -9.8, \tag{1}$$

Encontrar la velocidad es encontrar una función $v(t)$, que cumpla la ecuación (1).

Si, ademas de la velocidad, quisiésemos saber su posición exacta en un momento dado, usamos el mismo truco, ya que la variación del espacio, $h(t)$, es la velocidad. Así pues, una vez resuelta (1), planteamos la nueva ecuación

$$h'(t) = v(t), \tag{2}$$

cuya solución nos daría la posición en cada instante.

En general, para pasar de la realidad al modelo matemático requerimos un proceso de análisis del fenómeno. Este proceso se llama modelado. Veamos otros casos simples.

0.2 ¡Hay Contaminación en el Lago!.

En un lago de volumen constante V entran la cantidad I de metros cúbicos de agua limpia por segundo. Queremos calcular la cantidad de agua contaminada $P(t)$, en cada instante t.

En este caso de nuevo nos interesa la variación de $P(t)$, con lo que buscamos el valor de su derivada, es decir

$$P'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}.$$

Entre el instante t y $t + h$ habrán entrado Ih metros cúbicos de agua limpia. Asi pues habrá un volumen de $V + Ih$, mientras que la cantidad de agua contaminada permanece constante $P(t)$, con lo que la concentración en el instante $t+h$ será $\frac{P(t)}{V+Ih}$. Así pues, como el volumen permanece constante, tendrán que salir la misma cantidad Ih de metros cúbicos, solo que saldrán en proporciones dadas por la concentración de agua contaminada es decir saldrán $Ih\frac{P(t)}{V+Ih}$ de agua contaminada, con lo que la cantidad de agua contaminada en el instante $t+h$ es $P(t+h) = P(t) - Ih\frac{P(t)}{V+Ih}$, con lo que nos queda

$$P'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{P(t)}{V + Ih} = -P(t)\frac{I}{V}$$

es decir, queda la ecuación diferencial

$$P'(t) = -P(t)\frac{I}{V} \tag{3}$$

Para encontrar la cantidad de agua contaminada deberemos encontrar una función cuya derivada sea proporcional a ella misma, con constante de proporción dada por $c = \frac{I}{V}$, relación entre agua limpia que entra y volumen de agua del lago.

Si suponemos que el agua que entra está contaminada a razón constante r sobre el agua que entra, entonces el agua contaminada en el tiempo $t+h$ será $P(t) + rIh$, mientras que la que sale es

$$\frac{P(t) + rIh}{V + Ih} Ih,$$

con lo que en este caso, la derivada nos queda

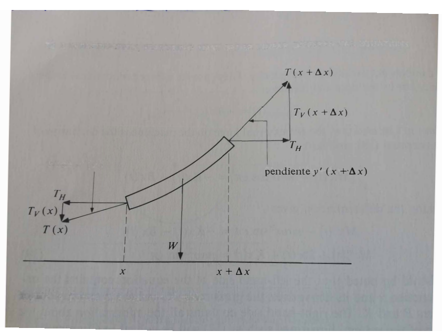
$$P' = rI - P\frac{I}{V}, \tag{4}$$

alterada de la anterior por el factor constante rI de contaminante que entra en el lago.

0.3 Puentes y Cables colgantes.

Supongamos que tenemos un puente sostenido por un cable que cuelga de dos pilares paralelos. Queremos saber la forma que toma el cable. Esta se puede considerar como la altura que toma en cada punto x entre los pilares, suponiendo que el cero es el punto medio, en donde el cable es tangente al puente.

Analizemos. Vamos a considerar una pequeña sección del cable entre x y $x+\Delta x$ Este segmento esta sometido a la tensión del cable y al peso del puente. Por un lado, como el puente no se mueve de forma horizontal, la componente horizontal de la fuerza es cero, con lo que la componente horizontal de la tensión es constante, ya que a cada extremo de la sección actúa en sentidos opuestos



$$T_H(x) = T_H(x+\Delta x) = T_H$$

La componente vertical de la fuerza esta formada por el peso del puente, y la comoponente vertical de la tensión, con lo que si llamamos W al peso del puente en el segmento considerado, se tiene

$$T_V(x+\Delta x) = T_V(x) + W \tag{5}$$

Ahora bien, la pendiente de la curva, multiplicada por la componente vertical de la tensión en cada punto, dará la componente horizontal, con lo que en cada extremo del segmento se tiene

$$\begin{aligned} T_v(x) &= y'(x)T_H \\ T_v(x+\Delta x) &= y'(x+\Delta x)T_H, \end{aligned} \tag{6}$$

asi pues juntando (5) y (6) se tiene

$$y'(x + \Delta x) - y'(x) = \frac{W}{T_H} \tag{7}$$

y teniendo en cuenta que $W = \rho \Delta x$ queda

$$\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T_H}$$

haciendo Δx tender a cero se obtiene

$$y''(x) = \frac{\rho}{T_H}, \tag{8}$$

que tiene por solución

$$y(x) = \frac{\rho}{2T_H} x^2 + c_1 x + c_0,$$

y teniendo en cuenta que $y(0) = y'(0) = 0$, vemos que el cable tiene la forma de una parábola cuya curvatura depende de las propiedades intrínsecas del cable y el puente

$$y(x) = \frac{\rho}{2T_H} x^2.$$

Si usamos que la longitud del puente es $2L$, y sustituimos en $x = L$, podemos calcular la tensión en función de la altura del pilar,

$$T_H = \frac{\rho L^2}{2h},$$

mientras que la componente vertical de la tensión queda

$$T_v(x) = \rho x.$$

Así pues, la tensión en cada punto viene dada por la fórmula

$$T(x) = \sqrt{T_H^2 + T_v^2} = \rho \left(\sqrt{\frac{L^4}{4h^2} + x^2} \right)$$

Una ecuación diferente aparece si la única masa por la que cuelga el cable, es el mismo cable. Esta curva aparece por ejemplo en los cables de teléfono, o en los de electricidad por los que se alimenta el tren. Se llama catenaria. En este caso la ecuación será la misma, salvo que el peso ahora es el segmento de cable $\rho \Delta s$. Suponiendo que Δx es pequeño, poidemos suponer que el cable es una recta y la longitud del cable en ese intervalo se puede calcular por pitágoras obteniendo

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (y'(x)\Delta x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + y'(x)^2},$$

lo que nos da sustituyendo en (7) y haciendo $\Delta x \to 0$

$$y''(x) = \frac{\rho}{T_H}\sqrt{1 + y'(x)^2}, \tag{9}$$

No hay mas que sustituir para ver que la función $y(x) = \frac{T_H}{\rho}\left(\cosh\left(\frac{\rho}{T_H}x\right) - 1\right)$ es solución de la ecuación. ¿Y de donde sale esto? En la siguiente sección vamos a desarrollar métodos para resolver estas y otras muchas ecuaciones diferenciales.

1 Ecuaciones Diferenciales de orden 1

En la mayor generalidad, una ecuación diferencial es una ecuación del estilo

$$F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0.$$

El orden de la ecuación es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Algunos ejemplos pueden ser las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (8), (9), o también

$$\begin{aligned}
&y' = -kt \\
&y' + 2xy = e^{-x^2} \\
&y'' - 5y' + 6y = 0 \\
&(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, la cuarta es muy famosa y se llama ecuación de Legendre.

Es fácil comprobar que una función dada es solución de unba ecuación diferencial dada, así por ejemplo e^{2x} y e^{3x} son soluciónes de la tercera, mientras que e^{-x^2} lo es de la segunda.

A veces las soluciones aparecen de forma implicita, como por ejemplo $xy = \log y$ es solución de

$$y' = \frac{y^2}{1 - xy}.$$

Ya sabemos que la integral puede ser muy complicada de resolver, y a veces, imposible de encontrar una solución en términos elementales. Pero es que hay algunas ecuaciones que ni siquiera tienen solución, como puede ser

$$y'^2 + 1 = 0.$$

Así pues, primero de todo necesitariamos tener un método que nos permita al menos decidir si la ecuación tiene o no solución. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1 *(Picard) Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones contínuas en un rectángulo R, entonces para cada punto interior a R existe una única curva regular solución del problema.*

La solución general $y = y(x,c)$ depende de un parámetro c que determina el punto por el que pasa la curva. De forma inversa, dada la ecuación de la familia de curvas se puede encontrar la ecuación diferencial

Ejemplo. Si derivamos la ecuación que define la familia de círculos centrados en el origen, $x^2 + y^2 = c^2$, respecto de x se obtiene

$$2x + 2yy' = 0, \tag{10}$$

que nos da directamente la ecuación diferencial deseada. Si por ejemplo comenzamos con la ecuación que define la familia de círculos con centro en el eje x y que pasan por el origen, esta es $x^2 + y^2 = 2xc$, y derivando obtenemos

$$x + yy' = c,$$

y si sustituimos c en la ecuación original obtenemos

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \tag{11}$$

Una vez que sabemos que cierta ecuación diferencial tiene solución, necesitamos desarrollar métodos para resolverlas.

1.1 Integración directa

Entre las ecuaciones diferenciales de primer orden la más sencilla se puede expresar como

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{12}$$

que se resuelve integrando en la variable x. Las letras que se utilizan para denotar la variable dependiente o independiente pueden variar con el problema. Así, en la Sección 0.1 debiamos resolver las ecuaciones (1) y (2) para encontrar la velocidad y la posición del clavadista en cada instante, e integrando obtenemos

$$v = -9.8t + c.$$

Como para $t = 0$, $v = 0$, queda que $c = 0$. Si ahora queremos calcular la posición, basta utilizar que la velocidad es la variación de la posición luego

$$h(t) = -9.8t$$

e integrando queda

$$h(t) = -\frac{9.8}{2}t^2 + k,$$

y como $h(0) = 100$, $k = 100$. Basta ahora resolver la ecuación de segundo grado para verificar que el clavadista entrará en el agua en 3.19 segundos.

1.2 Separación de Variables

Para determinar la cantidad de agua contaminada nos falta encontrar la función $P(t)$ que resuelve las ecuaciones (1) y (2) en el caso correspondiente. En el primer caso, para encontrar la cantidad de agua contaminada, deberemos encontrar una función cuya derivada sea proporcional a ella misma, con constante de proporción dada por $c = \frac{I}{V}$, relación entre agua limpia que entra y volumen de agua del lago.

Pero nosotros ya sabemos que la exponencial es una función con estas propiedades, es decir si $P(t) = Ke^{-ct}$, entonces $P'(t) = -c(Ke^{-ct}) = -cP(t)$. Con lo que basta con medir la contaminación en un momento inicial $t = 0$ $P(0) = P_0$ para determinar la cantidad de agua contaminada en cada instante

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{I}{V}t}.$$

Hemos tenido suerte. Nos acordábamos de que la derivada de la exponencial es ella misma, para poder limpiar la contaminación en el lago. En general si tuviésemos una base de datos enorme de derivadas, podríamos resolver ecuaciones diferenciales buscando en la tabla. Lo que pasa es que no sería muy eficiente. Es como si de utilizásemos esa tabla enorme para calcular integrales. Pero no lo hacemos así. Lo que hacemos es utilizar métodos generales de integración, que nos permiten aplicarlos para resolver muchas de las integrales que nos aparecen. Para resolver ecuaciones diferenciales tenemos que integrar, como hemos visto en el primer ejemplo, con lo que vamos a hacer lo mismo y utilizar los métodos generales de integración.

Supongamos que queremos resolver una ecuación diferencial del estilo

$$g(y)y' = f(x). \tag{13}$$

Un ejemplo simple es la ecuación que queremos resolver (3). En ese caso sería

$$P'(t) = -P(t)\frac{I}{V}$$

y $g(P) = \frac{1}{P}$, $f(t) = -\frac{I}{V}$ es en este caso constante. En general, aunque nosotros no la sepamos, imaginemos que la solución a (13) es $y(x)$. Entonces se tiene la identidad

$$g(y(x))y'(x) = f(x)$$

Integrando queda

$$\int g(y(x)y'(x)dx = \int f(x)dx.$$

Es ahora cuando utilizamos el cambio de variable y llamamos $y(x) = y$ con lo que $y'(x)dx = dy$, y nos queda

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx,$$

y no tenemos mas que integrar a cada lado para encontrar la soliución. Así pues una ecuación diferencial con las variables separadas se puede resolvber con un cambio de variable. Veamos algún ejemplo.

Ejemplo. La ecuación (3) es del tipo (13), y haciendo el cambio de variable e integrando queda la solución

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{I}{V}t}.$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

$$y^2 y' = x^2.$$

En este caso $g(y) = y^2$, $f(x) = x^2$, luego tenemos que integrar

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx,$$

con lo que

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c.$$

A las ecuaciones del estilo (13) las llamaremos de variables separadas. Una vez que la tenemos escrita de esa manera, puede ser útil para acordarse el escribirla con la siguiente notación $y' = \frac{dy}{dx}$, y multiplicar por dx para escribir la ecuación como

$$g(y)dy = f(x)dx, \tag{14}$$

e integrar a ambos lados. Esta notación es muy util, porque permite englobar las ecuaciones de variables separadas en otras mas generales del tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Así una ecuación de primer orden nos puede aparecer de alguna de las 2 formas equivalentes

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y) \\ &M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \end{aligned}$$

En algunas ocasiones, a pesar de que la ecuación es exacta, puede no ser fácill de reconocer a simple vista. El siguiente resultado da un método que funciona en general

Proposición 2 *La ecuación $Mdx - Ndy = 0$ es de variables separables si y solo si*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial y}}{N}\right) = 0 \tag{15}$$

Ademas, $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ *donde*

$$f(x) = e^{\int\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx}$$
$$g(y) = e^{-\int\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial y}}{N}\right)dy}$$

Prueba. Si la ecuación es de variables separables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{N} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{16}$$

con lo que tomando logaritmos,

$$\log M - \log N = \log(M/N) = \log(f(x)/g(y)) = \log(f(x)) - \log(g(y)) \tag{17}$$

y derivando respecto de x queda

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

y derivando respecto de y se obtiene la primera parte del resultado. Para la segunda igualdad basta con tomar logaritmos, y derivar primero respecto de y y luego respecto de x en (17).

Por otro lado, supongamos que (15) es cierto. Entonces

$$\frac{\partial \log(M/N)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = h(x)$$

e integrando respecto de x queda

$$\frac{M}{N} = u(y)e^{\int h(x)dx}. \tag{18}$$

Usando la segunda parte de (15)

$$\frac{\partial \log(M/N)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial y}}{N} = -H(y)$$

e integrando esta vez respesto de y quedará

$$\frac{M}{N} = v(x)e^{-\int H(y)dy}. \tag{19}$$

Basta ahora igualar (18) y (19) para obtener el resultado.

Ejemplo. Consideramos la ecuación

$$y' = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$(xy + 2y - x - 2)dx - (xy - 3y + x - 3)dy = 0,$$

con lo que $M = xy + 2y - x - 2$, $N = -(xy - 3y + x - 3)$. Así pues

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{y-1}{xy + 2y - x - 2} - \frac{y+1}{xy - 3y + x - 3}.$$

Derivando respecto de y queda

$$\frac{\partial\left(\frac{y-1}{xy+2y-x-2}\right)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial\left(\frac{y+1}{xy-3y+x-3}\right)}{\partial y}.$$

De la misma forma vemos que

$$\frac{\partial\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial y}}{N}\right)}{\partial x} = 0,$$

con lo que la ecuación es de variables separables. Basta ahora observar que $M = (x+2)(y-1)$, y que $N = -(x-3)(y+1)$ para obtener, dividiendo por $(y+1)(x+2)$,

$$\frac{y-1}{y+1}dy = \frac{x-3}{x+2}dx,$$

e integrando queda

$$y - 2\log(y+1) = \int \frac{y-1}{y+1}dy = \int \frac{x-3}{x+2}dx = x - 5\log(x+2) + c.$$

1.3 Ecuaciones Exactas

Derivando una ecuación del estilo $f(x, y) = c$, nos queda

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Definición 3 *A las ecuaciones del estilo*

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

se les llama ecuaciones exactas.

Ejemplos. La ecuación $ydx + xdy = 0$ es exacta y tiene como solución $xy = c$, mientras que $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ tiene como solución $\frac{x}{y} = c$.

Lema 4 *Una ecuación del estilo* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *es exacta si y solo si*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La condición es necesaria por el Teorema de Schwarz, ya que las derivadas cruzadas deben ser iguales. Por otro lado, integrando M respecto de x se obtiene una función

$$f(x,y) = \int_0^x M(x,y)dx + g(y),$$

y derivando respecto de y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y),$$

que sólo puede ser cierto si

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^x M(x,y)dx$$

Derivando respecto de x se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_0^x M(x,y)dx = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\int_0^x M(x,y)dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

1.4 Factor integrante

La ecuación $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ no es una ecuación exacta, ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, mientras que $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$. Sin embargo, si multiplicamos todo por $\frac{1}{x^2}$, queda $\frac{y}{x^2}dx + (y - \frac{1}{x})dy = 0$, con ambas derivadas cruzadas iguales a $\frac{1}{x^2}$ y por tanto es exacta.

Definición 5 *Un factor integrante* $\mu(x,y)$ *para la ecuación* $Mdx + Ndy = 0$ *es una funcion tal que* $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ *es una ecuación exacta.*

En realidad cualquier ecuación que aparece de la igualdad $f(x,y)=c$ admite un factor integrante. Concretamnte se tiene, derivando que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

mientras que por otro lado,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N},$$

con lo que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{M}=\mu(x,y).$$

Observar que $\frac{\partial f}{\partial x}=\mu(x,y)M$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=\mu(x,y)N$.

Lema 6 *Una ecuación que admite un factor integrante, admite infinitos.*

Prueba. En efecto multiplicar por cualquier función de f produce un nuevo factor integrante, ya que

$$F(f)(\mu M dx+N dy)=F(f)df$$

e integrando se obtiene la solución $\int F(f)df=c$.

Vamos a suponer que la ecuación admite un factor integrante. Entonces

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y}=\frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

es decir,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Supongamos que, de las infinitas soluciones que tiene esa ecuación una solo depende de x. Entonces queda

$$\frac{d\mu}{\mu\, dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=g(x),$$

e integrando obtenemos

$$\mu=e^{\int g(x)dx},$$

En el caso de factores integrantes solo de y queda

$$\frac{d\mu}{\mu\, dy}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=h(y),$$

y por tanto

$$\mu=e^{\int h(y)dy}$$

1.5 Ecuación lineal de primer orden.

Son las ecuaciones del estilo

$$\frac{dy}{dx} + py = q.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d\left(ye^{\int Pdx}\right)}{dx} = \frac{dy}{dx}e^{\int Pdx} + yPe^{\int Pdx} = qe^{\int Pdx},$$

encontramos que la solución general es

$$y = \left(\int qe^{\int Pdx}dx + c\right)e^{-\int Pdx}. \tag{20}$$

Ejemplo. Para resolver la ecuación

$$y' + y\cot\text{an}(x) = 2x\,\text{cosec}(x),$$

multiplicamos por $e^{\int Pdx} = e^{\int \text{cotan}(x)dx} = \text{sen}(x)$, con lo que nos queda

$$d(\text{sen}(x)y) = 2x,$$

e integrando

$$y\,\text{sen}(x) = x^2 + c,$$

es decir

$$y = \frac{x^2 + c}{\text{sen}x}.$$

1.6 Cambio de Variable

Para resolver la ecuacion (4), vemos que un simple cambio de nombre a la variable $P = Q + rV$ transforma la ecuación en

$$Q' = -Q\frac{I}{V},$$

que es una ecuación de variables separadas, dando como solución al deshacer el cambio

$$P(t) = rV + (P_0 - rV)e^{-\frac{I}{V}t}.$$

Observar que si P es una función de t, Q no es mas que la trasladada, y $P' = Q'$.

1.6.1 Ecuaciones homogéneas

Hay algunos cambios de variable que van a funcionar para familias amplias de EDOS.

Definición 7 *Una función se dice que es homogénea de grado* n *si*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Ejemplos. Las funciones $x^2 + xy$ o $\operatorname{sen}(x/y)$. En general si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, entonces

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se llama una ecuación homogenea yt se puede resolver por un cambio de variable $z = y/x$, con lo que $xdz + dxz = dy$, y queda una ecuación de variables separables.

Ejemplo. La ecuación $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$ queda, después del cambio de variable

$$(1 + z)dx - (1 - z)(xdz + dxz) = 0,$$

o bien

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - z)}{1 + z^2}dz,$$

e integrando se obtiene

$$\log x = \arctan(z) - \frac{1}{2}\log(1 + z^2) + c,$$

y deshaciendo el cambio queda

$$\arctan(y/x) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + c.$$

1.6.2 Ecuaciones de Bernoulli

Hay veces que un cambio de variable permite reducir una ecuación diferencial a otra conocida. Este es el caso de la ecuación de Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Si hacemos el cambio $z = y^{1-n}$ queda $z' = (1 - n)y^{-n}y'$ con loque , sustituyendo en la ecuación y dividiendo por y^n queda

$$z' + (1 - n)zp(x) = (1 - n)q(x),$$

que es de tipo lineal.

Ejemplo. Vamos a resolver por ejemplo la ecuación

$$xy^2y' + y^3 = x\cos x.$$

Dividiendo por xy^2, queda una ecuación de tipo Bernoulli, con $n = -2$, $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \cos x$. Así pues, haciendo el cambio $z = y^3$, queda la ecuación lineal

$$z' + \frac{3}{x}z = 3\cos x$$

que utilizando (20) queda la solución

$$y = \left(\int \cos(x)e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right)e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx = \frac{1}{x}\left(\int x\cos(x)dx + c\right)$$

1.6.3 Polares

Cuando la ecuación depende de alguna forma directamente de la distancia al origen, es útil cambiar a coordenadas porlares. Para ello debemos encontrar el valor de x,y e y' en las nuevas variables. El cambio a coordenadas polares nos da las dos primeras

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Debemos ahora encontrar el valor de y'. Tenemos $x^2 + y(x)^2 = r^2$, mientras que $\tan(\theta) = \frac{y(x)}{x}$. Así pues, derivando respecto de x, queda

$$(1 + \tan^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{y'x - y}{x^2},$$

es decir

$$r^2\frac{\partial\theta}{\partial x} = y'x - y \tag{21}$$

mientras que

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = x + yy' \tag{22}$$

y dividiendo (21) entre (22) queda

$$r\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{y'x - y}{x + yy'}, \tag{23}$$

que nos da una relación entre y' y $\theta'(r)$.

1.6.4 Reducción del orden

Cuando en una edo no aparece una de las variables, un simple cambio de variable reduce el orden de la ecuación.

Primer caso. (Falta la variable dependiente)

Así si en una ecuación de orden 2 no aparece la variable dependiente, es decir, es una ecuación del estilo

$$f(x, y', y'') = 0,$$

entonces un cambio $y' = p$ nos da $y'' = p'$ reduciendo el orden de la ecuación.

Ejemplo. Para resolver $xy'' = y' + (y')^3$, hacemos el cambio $y' = p$, con lo que queda

$$xp' = p + p^3,$$

que es de variables separables

$$\frac{dp}{p + p^3} = \frac{dx}{x},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{p(1 + p^2)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{1 + p^2},$$

nos queda después de integrar

$$\log p - \frac{1}{2}\log(1 + p^2) = \log x + c,$$

es decir

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = cx,$$

o bien

$$\frac{1 - c^2x^2}{(cx)^2} = \frac{1}{p^2},$$

es decir

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1 - c^2x^2}},$$

e integrando de nuevo obtenemos

$$y = -\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2x^2} + k.$$

Segundo caso. (Falta la variable independiente) Si, en una edo de orden 2 falta la variable independiente, el mismo cambio nos da $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$.

Ejemplo. Consideramos la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. El cambio anterior nos da

$$pp' + k^2 y = 0,$$

es decir

$$p^2 + k^2 y^2 = c^2$$

o bien

$$\frac{dy}{\sqrt{1-(ky/c)^2}} = \pm c\, dx$$

e integrando se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(ky/c) = \pm kx + b,$$

o bien $y = A\operatorname{sen}(\pm kx + b)$.

En la ecuacion (8) se puede hacer el cambio de variable $y' = p$, con lo que queda

$$p' = \frac{\rho}{2T_H}$$

que tiene por solución

$$y'(x) = p(x) = \frac{\rho}{2T_H} x + c,$$

e integrando de nuevo queda

$$y(x) = \frac{\rho}{2T_H} x^2 + c_1 x + c_0,$$

y teniendo en cuenta que $y(0) = y'(0) = 0$, vemos que el cable tiene la forma de una parábola cuya curvatura depende de las propiedades intrínsecas del cable y el puente

$$y(x) = \frac{\rho}{2T_H} x^2.$$

De la misma forma si en la ecuación(9) hacemos el cambio $y' = p$, nos queda

$$p'(x) = \frac{\rho}{T_H} \sqrt{1+p^2},$$

una ecuación de variables separadas que queda,

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\rho}{T_H} dx.$$

Para calcular la integral de la izquierda hacemos el cambio de variable $p = \operatorname{senh}(t)$, $dp = \cosh(t)dt$, con lo que

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dt = t + c,$$

es decir la solución es

$$\operatorname{arcsenh}(p) = \frac{\rho}{T_H}x + c,$$

con lo que

$$y'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{\rho}{T_H}x + c,\right),$$

que tiene por integral

$$y(x) = \frac{T_H}{\rho}\cosh(\left(\frac{\rho}{T_H}x + c,\right) + d.$$

e imponiendo las condiciones $y'(0) = y(0) = 0$, queda

$$y(x) = \frac{T_H}{\rho}\left(\cosh\left(\frac{\rho}{T_H}x\right) - 1)\right).$$

1.7 Aplicaciones geométricas.

Ya sabemos que una ecuación diferencial define una familia de curvas. Y teniendo en cuenta que la derivada es la pendiente de la tangente a la curva, una de las aplicaciones mas directas de las EDOS se dan en la geometria. Empezemos por ejemplo por encontrar curvas perpendiculares a unas dadas.

1.7.1 Trayectorias Ortogonales

Definición 8 *Dos familias se dicen ortogonales si cada curva en una familia corta de forma perpendicular a cualquier curva de la otra familia.*

Para calcular la trayectoria ortogonal debemos cambiar la pendiente de la tangente a la curva, por la pendiente de la tangente a la curva ortogonal con lo que si la ecuación diferencial de las curvas originales es $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales viene dada por $\frac{dy}{dx} = -1/f(x, y)$, o bien

$$-\frac{dx}{dy} = f(x, y).$$

Ejemplo. En el caso de las circunferencias centradas en el origen, $x^2 + y^2 = c^2$, con ecuación diferencial dada en (10) se obtiene la ecuación diferencial para la familia ortogonal

$$y' = \frac{y}{x},$$

que es de variables separables, con lo que

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

que integrando se obtiene

$$\log y = \log x + c,$$

o bien $y = kx$. Es decir, las curvas ortogonales a las circunferencias centradas en el origen, son las rectas que pasan por el origen.

En muchas ocasiones la ecuación vendrá dada en coordenadas polares y, en ese caso, conviene saber la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales en esas coordenadas. Ahora bien si cambiamos y' por $-\frac{1}{y'}$ en (23), queda

$$\frac{-\frac{1}{y'}x - y}{x - \frac{y}{y'}} = -\frac{x + yy'}{xy' - y} = -\frac{1}{r\frac{\partial \theta}{\partial r}},$$

es decir, similarmente al caso de coordenadas cartesianas, la ecución diferencial de las trayectorias ortogonales en coordenadas polares, aparece al hacer el inverso cambiado de signo.

Ejemplo En el caso de círculos con centro en el eje x, la ecuación diferencial esta dada por (11), que no es de variables separables. La ecuación sinembargo es homogénea y se puede resolver con el cambio adecuado, y también pasando a polares. En este caso queda

$$r = 2c\cos(\theta),$$

y derivando respecto de r

$$1 = -2c\,\mathrm{sen}(\theta)\theta'(r)$$

y eliminando la constante con la primera ecuación obetenemos

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\cot(\theta).$$

Ahora solo tenemos que utilizar la inversa cambiada de signo para calcular la EDO de las trayectorias ortogonales. En este caso nos da

$$\frac{rd\theta}{dr} = \tan(\theta),$$

que vuelve a ser una ecuación separable en las variables θ y r, e integrando nos da la solución

$$r = 2k\,\mathrm{sen}(\theta). \tag{24}$$

1.7.2 Otros problemas geométricos.

Como hemos mencionado, cualquier tipo de problema relacionado con la tangente a una curva, será un buen candidato a resolver con técnicas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo. Hallar las curvas que satisfacen cada una de las condiciones geométricas que se describen a continuación. Recordad que la recta tangente a una curva en el punto (x, y) tiene por ecuación

$$v = y + y'(x)(u - x). \tag{25}$$

1) La porción de la tangente limitada por los ejes tiene como punto central al punto de tangencia.

   En este caso la recta tangente corta a los ejes en los puntos $(0, y - xy'(x))$ y $(x - \frac{y}{y'(x))}, 0)$, con lo que por las condiciones del enunciado se da la ecuación

   $$\left(\frac{x - \frac{y}{y'(x)}}{2}, \frac{y - xy'(x)}{2}\right) = (x, y),$$

   e igualando queda

   $$xy' = -y$$

   que es una ecuación de variables separadas con solución

   $$y = \frac{k}{x}.$$

2) La proyección sobre el eje x de la parte de la normal entre (x, y) y el eje x tiene longitud 1.

   La recta normal a una curva en el punto (x, y) tendrá pendiente $-\frac{1}{y'}$, con lo que tiene por ecuación

   $$v = y - \frac{1}{y'(x)}(u - x),$$

   que corta al eje x en el punto $(x + yy', 0)$, con lo que el segmento proyectado es el que va entre los puntos $(x, 0)$ y $(x + yy', 0)$, que tiene por longitud yy', con lo que la ecuación pedida es

   $$|yy'| = 1,$$

   que da las ecuaciones

   $$yy' = 1 \quad yy' = -1$$

   es decir la solución son las parábolas

   $$x = c \pm \frac{y^2}{2}$$

3) La parte dé la normal entre (x, y) y el eje y queda bisectada por el eje x.

Esta es otra forma de decir que el punto medio entre el punto de corte de la recta normal con el eje y y el punto de tangencia tiene coordenada $y = 0$. El punto de corte de la normal con el eje y es $(0, y+\frac{x}{y'})$, con lo que el punto medio es $(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2y'})$, y para que se anule la segunda coordenada queda la ecuación

$$2yy' = -x$$

de nuevo de variables separadas con solución

$$x^2 + 2y^2 = c^2.$$

4) El ángulo polar es igual al que forma la tangente con el radio polar.

El ángulo polar es el que forma el radio vector con el eje x, es decir cumple $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, mientras que el ángulo que forma la recta tangente, con el radio vector es el que cumple (23). Esto se puede ver de dos formas. Una geométricamente. Tomamos un pequeño segmento de la curva, y la consideramos en coordenadas polares. Teniendo en cuenta que la tangente del angulo será el cateto opuesto entre cateto contiguo, vemos que el aumento en el radio es Δr, mientras que para calcular la longitud de un segmento de angulo $\Delta\theta$ se ha de multiplicar por el radio, es decir, será $r\Delta$ con lo lo que diviviendo, y haciendo Δr tender a cero obtenemos

$$\lim_{\Delta r \to 0} r \frac{\Delta\theta}{\Delta r} = r \frac{\partial\theta}{\partial r} = r\theta'(r).$$

Vamos a hacerlo ahora considerando coordenadas cartesianas. La recta tangente tiene como vector director $(1, y')$, mientras que el radio vector es (x, y), asi pues usando el producto escalar obtenemos que el ángulo cumple

$$\cos(\alpha) = \frac{x + yy'}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 + (y')^2)}}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \tan^2(\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1 - \frac{(x+yy')^2}{(x^2+y^2)(1+(y')^2)}}{\frac{(x+yy')^2}{(x^2+y^2)(1+(y')^2)}} \\ &= \frac{(y - xy')^2}{(x + yy')^2}, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Así pues, para resolver nuestro problema igualamos α a θ y queda

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{(y - xy')^2}{(x + yy')^2},$$

o bien

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{(y - xy')}{(x + yy')}.$$

Resolviendo la primera queda

$$(y^2 + x^2)y' = 0,$$

que solo es cierto si $y' = 0$, es decir $y = k$. Resolviendo la segunda queda

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

que es justamente la ortogonal a (11), y que tiene por solución (24). De todas formas, la ecuación es homogénea, y podríamos haberla resuelto con el cambio $y = zx$, con lo que $y' = z'x + z$, y queda la ecuación de variables separables

$$xz' + z = \frac{2z}{1 - z^2}$$

es decir

$$xz' = \frac{z + z^3}{1 - z^2}$$

separando las variables se obtiene

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2}\right) dz = \frac{1 - z^2}{z + z^3} dz = \frac{1}{x} dx$$

e integrando queda

$$\frac{z}{1 + z^2} = \frac{x}{2k},$$

o bien deshaciendo el cambio

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2k},$$

o bien

$$x^2 + (y - k)^2 = k^2.$$

Ejemplo Una curva arranca desde el origen por el primer cuadrante. El área bajo la curva desde el origen hasta (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos. Hallar la ecuación de esa curva.

El área bajo la curva viene dada por la integral $Y(x) = \int_0^x y(x)dx$, mientras que el área del rectángulo es xy. Teniendo en cuenta que $Y' = y$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene la ecuación

$$Y = \frac{1}{3}xY'$$

que es una ecuación de variables separadas, con solución

$$Y = kx^3,$$

y derivando nos queda

$$y(x) = Kx^2,$$

es decir, las curvas son parábolas que pasan por el origen de coordenadas.

Ejemplo. Tres vértices de un rectángulo de área A están sobre el eje x, en el origen y sobre el eje y. Si el cuarto se desplaza sobre una curva $y = y(x)$ en el primer cuadrante de manera tal que el ritmo de cambio de A respecto de x es proporcional a A, hallar la ecuación de esa curva.

El enunciado nos dice que

$$A'(x) = kA(x)$$

con lo que $A(x) = Ce^{kx}$. Ahora, como el área es la del rectángulo que tiene por vértices opuestos $(0, 0)$ y $(x, y(x))$, tiene área $A(x) = xy(x)$, con lo que

$$y(x) = \frac{Ce^{kx}}{x}.$$

1.8 Ecuaciones lineales de segundo orden

Son las ecuaciones del estilo

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x). \tag{26}$$

A diferencia de las ecuaciones de primer orden, estas no admiten un método general de resolución, y nos dedicaremos a alguna ecuaciones en particular y al caso general en que los coeficientes son constantes.

Como hicímos en primer orden, primero establecemos un teorema que nos permite decidir la existencia de solución a una cierta ecuación.

Teorema 9 *Si las funciones P, Q, R son contínuas en un intervalo $[a, b]$ e y_0, y_0' son dos valores cualquiera, la ecuacion (26) tiene solución única tal que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.*

Si $R(x) = 0$, la ecuación se llama homogenea. Esta es en realidad la más importante. Cuando $R(x) \neq 0$ se llama ecuación completa.

Siempre que no se diga lo contrario, nos fijaremos en el caso en el que las funciones cumplen las condiciones del teorema anterior. En ese caso, podemos describir la solución completa a la ecuación siguiendo el siguiente teorema:

Teorema 10 *La solución general de la ecuación completa (26) es la suma de una solución particular y la solución general de la ecuación homogenea.*

Así pues, necesitaremos resolver primero la ecuación con término independiente $R(x) = 0$, y luego encontrar una solución particular para la completa.

Prueba. Basta con ver que si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación completa, entonces $y = y_1 - y_2$ es solución de la homogénea, lo cual es evidente al substituir y en la ecuación.

$$\begin{aligned} y'' + Py' + Qy &= (y_1 - y_2')' + P(y_1 - y_2)' + Q(y_1 - y_2) \\ &= y_1'' + Py_1' + Qy_1 - (y_2'' + Py_2' + Qy_2) \\ &= R(x) - R(x) = 0. \end{aligned}$$

Así pues, debemos encontrar la solución general de la ecuación homogénea.

Lema 11 *Dadas dos soluciones y_1 e y_1 de la ecuación homogenea, cualquier combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ también lo es.*

Prueba. Claro, si y_1 e y_2 son solución entonces

$$\begin{aligned} 0 &= c_1(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + c_2(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2) \\ &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \end{aligned}$$

Podría ocurrir que una es multiplo de la otra. En cualqueir otro caso, dadas dos soluciones particulares de la homogenea, entonces $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general.

Teorema 12 *Dadas dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea, entonces $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general.*

Prueba. Dada una solución de la ecuación y hay que encontrar dos constantes tal que $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Ahora bien, como la solución es única una vez ajustamos los valores iniciales, se tiene que es suficiente probar que existen dos constantes

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \\ y'(x_0) &= c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0), \end{aligned}$$

para algun x_0. Este sistema tendrá solució si

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0.$$

A $W(x)$ se le llama Wronskiano de las soluciones y_1, y_2 y tiene la siguiente propiedad.

Lema 13 *El Wronskiano de dos soluciones a (26) es o bien identicamente cero, o no se anula nunca.*

Prueba. Derivando se obtiene

$$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)$$

y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$\frac{dW}{dx} + PW = 0,$$

con lo que $W(x) = ce^{-\int P dx}$ que demuestra el resultado pues es una exponencial que solo se anulará si $c = 0$.

Lema 14 *Dos soluciones son linealmente dependientes si y solo si $W \equiv 0$.*

Prueba. Si son linealmente dependientes el resultado es obvio. Supongamos que $W \equiv 0$. Entonces, dividiendo por y_1^2, que se puede pues es no cero en un intervalo $[c, d]$ por continuidad si no es la solución trivialemente nula, queda que

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0,$$

o bien

$$y_2 = ky_1,$$

en el intervalo $[c, d]$, pero entonces son iguales por el teorema de unicidad y, por tanto, linealmente dependientes.

Ejemplo. Para probar que $y(x) = c_1 \text{sen} x + c_2 \cos x$ es la solución general de $y'' + y = 0$, basta ver que son soluciones linealmente independientes. Que son soluciones se ve derivando, y para ver la independencia lineal observamos que

$$W(x) = -(\cos^2 x + \text{sen}^2 x) = -1 \neq 0,$$

en todo $x \in \mathbb{R}$.

Así pues para resolver la ecuación homogénea, debemos encontrar dos soluciones, calcular el wronskiano, y si no es cero, habremos terminado. En realidad, el siguiente método nos ahorra trabajo ya que, en realidad, basta con encontrar una sola solución.

1.8.1 Método de variación de constantes

Una vez que tenemos una solución de la ecuación homogénea, podemos calcular otra suponiendo que $y_2 = vy_1$, donde v es alguna función de x no constante. Entonces,

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$
$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

con lo que, para que sea solución de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + Py_2' + Qy_2 = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + P(v'y_1 + vy_1') + Qvy_1 \\ &= v(y_1'' + Py_1 + Qy_1) + v'(2y' + Py_1) + v''y_1 = v'(2y_1' + Py_1) + v''y_1, \end{aligned}$$

e integrando queda

$$\log(v') = -(2\log y_1 + \int P),$$

o bien

$$v' = \frac{e^{-\int P}}{y_1^2}$$

con lo que

$$v = \int \frac{e^{-\int P}}{y_1^2}.$$

Como v no es constante, pues el integrando no es cero, y_1 e y_2 son siempre linealmente independientes.

Ejemplo. $x^2y'' + xy' - y = 0$ tiene la solución $y = x$, y aplicando la fórmula anterior con $P = 1/x$ obtenemos $v = -\frac{1}{2x^2}$, y por tanto $y = -\frac{1}{2x}$ es otra solución linealmente intedepdiente.

Nos falta pues encontrar una solución de la ecuación homogénea. En el caso particular de coeficientes constantes, la solución se puede encontrar gracias al siguiente método.

1.8.2 Ecuación homogenea con coeficientes constantes

Tenemos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0,$$

con p y q números reales. Derivando vemos que $y = e^{mx}$, es solución si y solo si

$$p(m) = m^2 + pm + q = 0. \tag{27}$$

Al polinomio $p(m)$ se le llama polinomio característico de la ecuación. Asi pues, si el polinomio caracteristico tiene dos raíces reales y distintas m_1 y m_2, entonces la solución generl de la ecuación será

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_1x}$$

ya que $W(x) \neq 0$.

Cuando el polinomio caracteristico tiene dos raíces complejas $a \pm bi$, entonces $y = c_1 e^{ax}\text{sen}(bx) + c_2 e^{ax}\cos(bx)$ es la solución general. Basta con introducir las dos funciones $y_1 = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2 = e^{ax}\text{sen}(bx)$ en la ecuación para ver que sonb solución y calcular su wronskiano. Observar que, por la fórmula de Euler,

$$e^{(a \pm bi)x} = e^{ax}(\cos(bx) \pm i\text{sen}(bx)).$$

Por último, si el polinomio característico tiene una raíz doble, m entonces y $y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$ es la solución general. Observar que, en este caso, tendríamos $y = e^{mx}$ como solución y, aplicando el método de variación de constantes sale la segunda $y = xe^{mx}$.

Una observación interesante es que todas las soluciones que generan la solución homogénea son del estilo $y(x) = x^n e^{(u+iv)x}$. Si las raíces del polinomio característico son reales y distintas, salen solucioens con $n = 0, v = 0$. Si las raices son complejas conjugados, salen soluciones con $n = 0$, y si la raíz es doble, las soluciones son con $n = 1, v = 0$.

Ya sabemos como resolver completamente una EDO lineal de orden 2 homogénea con coeficientes constantes. Ahora pasamos a resolver la ecuación completa, con lo que tendremos que encontrar una solución particular. Tenemos dos métodos para ello, dependiendo del tipo de ecuación que estamos resolviendo.

1.8.3 Método de los coeficientes indeterminados.

Se utiliza para resolver ecuaciones completas con coeficientes constantes,

$$y'' + py' + qy = R(x),$$

cuando $R(x)$ es una combinación de funciones trigonométricas, exponenciales y polinomios. En realidad es suficiente con resolver la ecuación con término independiente $R(x) = q(x)e^{(a+ib)x}$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado n, ya que si para $R_1(x) = q_1(x)e^{(a_1+ib_1)x}$ hemos encontrado la solución particular y_1 y para $R_2(x) = q_2(x)e^{(a_2+ib_2)x}$ hemos encontrado la solución particular y_2, entonces para $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$ tendremos la solución $y = y_1 + y_2$, por la linealidad de la ecuación. Observar que para $n = 0, b = 0$ son exponenciales, para $n = 0, a = 0$ son los senos y cosenos por la ecuación de Euler, y para $a = b = 0$ serán los polinomios.

La idea viene de observar que las derivadas de una función del estilo $R(x)$ como arriba, tiene todas las derivadas del mismo estilo, salvo que varian las constantes, con lo que intentaremos probar una función y_p del mismo estilo con constantes indeterminadas a calcular para que nos de una solución.

Caso 1 (Caso polinómico) Si el término independiente $R(x)$ es un polinomio de grado n, entonces, como la derivada de un polinomio es un polinomio, probamos la función $y_p(x)$ un polinomio del mismo grado. Esto nos dará la solución particular excepto en el caso en que $p = 0$, o $p = q = 0$, ya que en esos dos casos a la derecha de la ecuación quedaría un polinomio de menor grado. En esos casos, quiere decir que el polinomio característico tiene 0 como raíz de multiplicidad 1 o 2. En ese caso, debemo probar funciones $y_p = x^m q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado n, y m es la multiplicidad de la raíz 0.

Ejemplo.

1. Resolver $y'' - 6y' + 8y = 8x^2 - 4x - 12$. En este caso el polinomio característico es $m^2 - 6m + 8 = (m-4)(m-2)$, con lo que la solución general de la homogénea es $y_H = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$. Probamos como solución particular un polinomio de grado 2, $y_p = x^2 + ax + b$. Observar que el término de mayor orden solo aparece en y y no en sus derivadas. Introduciéndolo en la ecuación queda

   $$2 - 12x - 6a + 8x^2 + 8ax + 8b = 8x^2 - 4x + 1,$$

   con lo que $a = 1$, $b = -1$, y la solución particular es $y_p = x^2 + x - 1$, y la solución de la ecuación es

   $$y_g = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x} + x^2 + x - 1.$$

2. Resolver $y'' - ay' = x^3$, para los distintos valores de a. En este caso, el polinomio característico es $m^2 + am = m(m - a)$, con lo que la solución general de la homogénea es $y_H = c_1 + c_2 e^{ax}$, si $a \neq 0$, y $y_H = c_1 + c_2 x$, si $a = 0$.

   Si $a \neq 0$, para encontrar la solución particular de la ecuación completa probamos una función del estilo $y_p = x(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3)$, y nos da al introducirlo en la ecuación un sistema con solución $a_0 = -\frac{1}{4a}$, $a_1 = -\frac{1}{a^2}$, $a_2 = -\frac{3}{a^3}$, $a_3 = -\frac{6}{a^4}$, con lo que la solución general de la ecuación es

   $$y_g = c_1 + c_2 e^{ax} - \left(\frac{1}{4a} x^4 + \frac{1}{a^2} x^3 + \frac{3}{a^3} x^2 + \frac{6}{a^4} x \right).$$

   Si $a = 0$, entonces $m = 0$ es raíz doble del polinomio caracteristico, con lo que probamos $y_p = x^2(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3)$, que nos da por solución $a_0 = \frac{1}{20}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, con lo que la solución general de la ecuación es

   $$y_g = c_1 + c_2 x + \frac{1}{20} x^5.$$

Caso 2. (Caso exponencial) En este caso $b = 0$. Vamos a suponer $R(x) = Ce^{ax}$. Entonces probamos $y_p = Ae^{ax}$ con lo que queda

$$A(a^2 + pa + q) = C.$$

Si $a^2 + pa + q \neq 0$, entonces la solución es $y_p = \frac{1}{a^2+pa+q}e^{ax}$. Esto es posible siempre que a no es solución del polinomio característico, es decir, que $y = e^{ax}$ no es solución de la ecuación homogénea. Si este fuese el caso, entonces probamos una solución del estilo $y_p = Axe^{ax}$, que es lo que saldría de aplicar el método de variación de constantes. Al introducirlo en la ecuación queda, utilizando que $a^2 + pa + q = 0$,

$$A(2a + p) = C$$

que tiene por solución $y_p = \frac{1}{2a+p}e^{ax}$ siempre que $2a + p \neq 0$. En caso de que $2a + p = 0$, es porque a es una raíz doble del polinomio característico y xe^{ax} es solución de la ecuación homogénea. De nuevo aplicando el método de variación de constantes, nos dice que debemos intentar una solución multiplicando de nuevo por x, es decir, $y_p = Ax^2e^{ax}$ y en este caso $A = \frac{C}{2}$ es solución.

Ejemplo.

1. Resolver la ecuación $y'' + y' + y = e^{2x}$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^2 + m + 1 = (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, que tiene por raices $m = \frac{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}}{2}$, con lo que la solución general de la ecuación homogénea queda de la siguiente forma $y_H = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 \cos(\sqrt{3}/2) + c_2\mathrm{sen}(\sqrt{3}/2)$. Para encontrar la solución particular de la ecuación completa, probamos $y_p = Ce^{2x}$, e introduciéndolo en la ecuación queda $C = \frac{1}{7}$, y la solución general de la ecuación es

$$y_g = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos(\sqrt{3}/2) + c_2\mathrm{sen}(\sqrt{3}/2)\right) + \frac{1}{7}e^{2x}.$$

2. Resuelve el problema de valores iniciales $y'' - 2y' + y = e^x$, junto con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 1$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = (m - 1)^2$, con lo que la solución general de la ecuación homogénea es $y_H(x) = c_1e^x + c_2xe^x$, y por tanto para la solución particular sabemos que es $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$, con lo que la solución general de la ecuación completa es

$$y_g(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Ahora usamos las condiciones iniciales. Evaluando en $x = 0$, queda $c_1 = 1$ y, derivando una vez y evaluando en cero queda $c_2 = 0$, con lo que la función, solución de la ecuación y que satisface las condiciones iniciales es

$$y = e^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

3. Resuelve la ecuación $y'' - 3y' + 2y = e^x$. El polinomio característico es $p(m) = m^2 - 3m + 2 = (m-2)(m-1)$, con lo que la soljución general de la ecuación homogénea es $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ y el término independiente es solución de la ecuación homogénea y probamos una función del estilo $y_p(x) = Cxe^x$ para resolver la completa. Al introducirla en la ecuación queda $C = -1$, con lo que la solución general es

$$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$$

Caso 3. (Caso trigonométrico) Es el caso $a = 0$, que por la fórmula de Euler es como tener un término independiente de la forma $R(x) = \alpha \cos(bx) + \beta \mathrm{sen}(bx)$, donde α o β pueden ser 0. Para encontrar la solución particular consideramos una función del mismo estilo $y_p = A\cos(bx) + B\mathrm{sen}(bx)$, con el objetivo de ajustar las constantes A y B para que sea solución de la ecuación completa. Introduciéndolo en la ecuación queda

$$(-Ab^2 + Bbp + Aq)\cos(bx) - \mathrm{sen}(bx)(Abp + Bb^2 - Bq) = \alpha \cos(bx) + \beta \mathrm{sen}(bx),$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{array}{rcl} A(q - b^2) + Bbp & = & \alpha \\ A(-bp) + B(q - b^2) & = & \beta, \end{array}$$

que tendrá solución siempre que el determinante $(q - b^2)^2 + (bp)^2 \neq 0$.

Si el determinate es cero, entonces puede ser porque $p = 0$, y $b = \sqrt{q}$, o $p \neq 0$ y $q = b = 0$. En el segundo caso la ecuación no contiene la variable dependiente, y podemos resolver la ecuación reducéndola de orden como en (1.6.4).

En el caso en que $p = 0$, las soluciones de la edo homogénea son $\cos(bx)$, $\mathrm{sen}(bx)$, donde $b^2 = q$, con lo que el término independiente también es solución de la homogéna. Análogamente al caso exponencial, y de nuevo usando el método de variación de constantes, nos sugiere probar una solución del estilo $y_p = x(A\cos(bx) + B\mathrm{sen}(bx))$, e introduciéndolo en la ecuación encontramos la solución $A = -\frac{\beta}{2b}$, $B = \frac{\alpha}{2b}$. Si también $q = b = 0$, la ecuación se resuelve por integración directa.

Ejemplo.

1. Resolver la ecuación $y'' + y = \mathrm{sen}(x)$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^2 + 1$, con lo que la solución general de la ecuación homogénea es $y_H = c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x)$, por lo que el término independiente está en resonancia con la ecuación homogénea, y tenemos que probar una solución particular del estilo $y_p(x) = x(A\cos(x) + B\mathrm{sen}(x))$. Introduciéndolo en la

ecuación queda $B = 0, A = -\frac{1}{2}$, con lo que la solución general de la ecuación es

$$y_g = c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x) - \frac{1}{2} x \cos(x).$$

2. Resolver la ecuación $y'' - y = \mathrm{sen}(x)$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^2 - 1$, con lo que la solución general de la ecuación homogénea es $y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Ahora, para encontrar una solución particular de la completa, probamos una función del estilo $y_p = A\cos(x) + B\mathrm{sen}(x)$, e introduciendola en la ecuación queda $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, con lo que la solución general a la ecuación es

$$y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \mathrm{sen}(x).$$

Caso 4. (Caso mixto) En este caso el término independiente será una función del estilo $R(x) = \alpha e^{ax} \mathrm{sen}(bx) + \beta e^{ax} \cos(bx)$, y debemos probar una solución del mismo estilo. $y_p = Ae^{ax}\mathrm{sen}(bx) + Be^{ax}\cos(bx)$, con constantes desconocidas A, B que deberémos resolver en función de α y β. Al introducirlo en la ecuación queda

$$\begin{aligned} &(a^2 + ap - b^2 + q)A + 2Bb(a + p/2) = \alpha \\ &(-2b(a + p/2)A + B(a^2 + ap - b^2 + q)) = \beta \end{aligned}$$

que tendrá solución si y solo si $R(x)$ no es solución de la ecuación homogénea. Y, en caso de que $R(x)$ sea solución de la ecuación homogénea, debemos una vez mas probar una solución del estilo sugerido por el método de variación de constantes, $y_p = x(Ae^{ax}\mathrm{sen}(bx) + Be^{ax}\cos(bx))$. Como la raíz es compleja, sólo puede tener multiplicidad 1.

Ejemplo.

1. Resolver la ecuación $y'' + 9y = e^x \cos(x)$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^2 + 9$, con lo que la soluición general de la ecuación homogénea es $y_H(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \mathrm{sen}(3x)$. El término independiente es mixto, que corresponde a la raíz compleja $\mu = 1 + i$, que no es raíz del polinomio característico, con lo que no será solución de la ecuación homogénea, y por tanto para resolver la particular probamos una función del estilo $y_p(x) = e^x(A\cos(x) + B\mathrm{sen}(x))$. Al meterlo en la ecuación queda

$$\begin{aligned} 9A + 2B &= 1 \\ 2A - 9B &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución $A = \frac{9}{85}$, $B = \frac{2}{85}$, luego la solución a la ecuación es

$$y_g(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \mathrm{sen}(3x) + \frac{9}{85} e^x \cos(x) + \frac{2}{85} e^x \mathrm{sen}(x).$$

2. Resolver la ecuación $y'' - 2y' + 2y = e^x \mathrm{sen}(x)$. En este caso el polinómio característico es $p(m) = m^2 - 2m + 2$, que tiene por raices $m = 1 \pm i$, con lo que la solución general de la homogénea es $y_H(x) = e^x(c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x))$, y por tanto el término independiente es solución de la homogénea. Lo que se puede comprobar metiéndolo en la ecuación. Así pues probamos una función del estilo $y_p(x) = xe^x(c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x))$. Metiéndolo en la ecuación queda $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$ con lo que la solución general de la ecuación es

$$y_g(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \mathrm{sen}(x)) - \frac{1}{2} x e^x \cos(x).$$

Caso 5. (Multiplicación por un polinomio) En cualquiera de los cuatro casos anteriores, si lo que tenemos como término independiente es $T(x) = q(x)R(x)$, con $q(x)$ un polinomio de grado n y $R(x)$ alguno de los casos anteriores, de nuevo si $R(x)$ no es solución de la ecuación homogénea probamos una solución del estilo $y_p = p(x)e^{ax}$, donde $p(x)$ es un polinomio a determinar de grado n. Si, por el contrario, $R(x)$ si es solución de la ecuación homogénea, y la raíz es de orden m entonces probaremos $y_p = x^m p(x) e^{ax}$, con $p(x)$ un polinomio a determinar de grado n.

Ejemplo.

1. Resolver la ecuación $y'' + 4y = x \cos(x)$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^2 + 4$, con lo que la soluición general de la ecuación homogénea es $y_H(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \mathrm{sen}(2x)$.El término independiente es un polinomio de grado 1, concretamente $q(x) = x$, multiplicado por $R(x) = \cos(x)$ que no es solución de la ecuación homogénea. Por tanto debemos probar una función del estilo $y_p(x) = (ax+b)(A\cos(x) + B\mathrm{sen}(x) = (u_1 x + v_1)\cos(x) + (u_2 x + v_2)\mathrm{sen}(x)$ y, metiéndolo en la ecuación queda

$$\begin{aligned} 3u_1 x + 2u_2 + 3v_1 &= x \\ 3u_2 x - 2u_1 + 3v_2 &= 0 \end{aligned}$$

o bien $u_1 = \frac{1}{3}$, $v_2 = \frac{2}{9}$, $v_1 = u_2 = 0$, con lo que la solución a la ecuación es

$$y_g(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{3} x \cos(x) + \frac{2}{9} \mathrm{sen}(x).$$

2.

1. Resolver la ecuación $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$, con lo que la soluición general de la ecuación homogénea es $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$. El término independiente es un polinomio de grado 2, concretamente $q(x) = x^2$, multiplicado por $R(x) = e^x$ que es solución de la ecuación homogénea, con multiplicidad 2. Por tanto debemos

probar una función del estilo $y_p(x) = x^2(ax^2 + bx + c)e^x = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^x$ y, metiéndolo en la ecuación queda

$$12ax^2 + 6bx + 2c = x^2,$$

o bien $a = \frac{1}{12}$, $b = c = 0$, con lo que la solución a la ecuación es

$$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{12} x^4 e^x.$$

Método de variacion de parámetros. Veremos que el método de coeficientes indeterminados sirve de forma análoga para resolver edos lineales de coeficiientes constantes de orden , con el término independiente de la misma forma que los vistos anteriormente. Si la edo es de orden 2 y el término independiente es de forma general, aún tenemos un método para resolverla.

Supongamos que sabemos la solución general de la ecuación homogenea $y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$ con y_1, y_2 soluciones de la homogénea y c_1, c_2 constantes.Vamos a hacer como en el método de variación de constantes, con una ligera modificicación. Como estamos buscando una función que no sea combinación lineal de las anteriores, utilizamos una función del estilo $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$, donde esta vez v_1 y v_2 serán funciones, sujetas a la condición extra $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$. Al derivar y utilizar esta condición nos queda el sistema

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' &= R(x), \end{aligned}$$

Que tendrá solución cuando y_1 e y_2 sean linealmente independientes, ya que en ese caso el wronskiano $W(x)$ no se anula. Resolviendo el sistema queda

$$\begin{aligned} v_1' &= -\frac{y_2 R(x)}{W(x)} \\ v_1' &= \frac{y_1 R(x)}{W(x)} \end{aligned}$$

e integrando obtenemos la solución particular

$$y_p = -\int \frac{y_2 R(x)}{W(x)} dx\, y_1 + \int \frac{y_1 R(x)}{W(x)} dx\, y_2.$$

Ejemplo. Resolver $y'' + y = \operatorname{cosec}(x)$. En este caso la solución general de la homogénea es la combinación lineal de $y_1 = \cos(x)$, $y_2 = \operatorname{sen}(x)$ con lo que $W(x) = 1$, y

$$-\int \frac{y_2 R(x)}{W(x)} dx = -x \qquad \int \frac{y_1 R(x)}{W(x)} dx = \log(\operatorname{sen}(x)),$$

y

$$y_p(x) = \log(\operatorname{sen}(x))\operatorname{sen}(x) - x\cos(x).$$

1.9 Ecuaciones lineales de orden superior.

Como ya hemos mencionado al principio, una ecuación diferencial de orden n es una ecuación del estilo

$$F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0.$$

Las ecuaciones lineales son el caso particular en que la función F es un polinomio lineal en las variables $(y, y', \dots, y^n)$, es decir, tanto la variable dependiente como sus derivadas aparecen aisladas y elevadas a 1. Son solo las del tipo

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + \cdots + a_0(x)y + b(x) = 0, \tag{28}$$

con $a_0(x), \dots, a_n(x), b(x)$ cualesquiera funciones de x, y no es lineal **ningún** otro tipo. En general consideraremos $a_n(x) = 1$, ya que siempre se puede dividir por el cofiente $a_n(x)$ y nos dará una ecuación del mismo estilo.

La principal característica de una ecuación lineal, como vimos en el caso de orden 2 es que la suma de soluciones es solución

Teorema 15 *(Principio de superposición) Dadas dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la Ecuación (28) homogénea, es decir $b(x) = 0$, entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es también solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2.*

Este teorema no es mas que el Lema 11 para cualquier orden. Y, de la misma forma, generalizando el Teorema 9 tenemos

Teorema 16 *Si las funciones en la Ecuación 28 son contínuas en un intervalo $[a, b]$, $a_n(x) = 1$, entonces por cada punto $x \in [a, b]$ hay una única solúcion a la Ecuación 28 con valores iniciales $y(x) = y_0, \dots y^{n-1)}(x) = y_n$.*

De esta forma deducimos el siguiente resultado

Corolario 17 *El conjunto de soluciones de la Ecuacion 28 homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n.*

Así pues, para resolver la Ecuación 28 basta encontrar n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, y una solución particular de la ecuación completa. Bien, pues ya sabemos cómo distinguir cuando n vectores son linealmente independientes en un espacio de dimensión n. Simplemente calculamos el determinante de la matriz que forman al escribirlos en cualquier base. Por tanto, y como hicimos en el caso de orden 2, definimos el wronskiano de la siguiente forma

Definición 18 *Dadas $n + 1$ funciones $y_1, \dots, y_{n+1}$ n veces diferenciables, se define el wronskiano como*

$$W[y_1, \dots, y_{n+1}](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n+1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n+1}' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{n)} & y_2^{n)} & \dots & y_{n+1}^{n)} \end{vmatrix}$$

Teorema 19 *El wronskiano de $n+1$ funciones linealmente dependientes $y_1, \ldots, y_{n+1}$ cumple $W[y_1, \ldots, y_{n+1}](x) = 0$.*

Una sencilla aplicación del anterior resultado surge cuando queremos encontrar la ecuación diferencial lineal definida por ciertas funciones dadas $f_1, \ldots, f_n$, linealmente independientes y n veces diferenciables. Efectivamente, como una ecuación homogénea de orden n tiene n soluciones linealmente independientes, cualquier otra solución será una combinación lineal de ellas con lo que

$$W[y, f_1, \ldots, f_n] = 0,$$

y desarrollando el determinante nos da una ecuación lineal de orden n.

Ejemplo.

1. Encontrar la ecuación diferencial lineal que definen las funciones $f_1 = e^x$, $f_2 = e^x \log x$.

   En este caso el cociente de ambas funciones no es constante, con lo que son linealmente independientes, y serán generadores del conjunto solución de una ecuación de orden 2, y cualquier otra solución será linelmente dependiente, y tendrán wronskiano conjunto 0. Asi pues formamos el wronskiano

$$\begin{aligned} 0 = W[y, f_1, f_2](x) &= \begin{vmatrix} y & f_1 & f_2 \\ y' & f_1' & f_2' \\ y'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & e^x & e^x \log x \\ y' & e^x & e^x(\log x + \frac{1}{x}) \\ y'' & e^x & e^x(\log x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) \end{vmatrix} \\ &= y'' e^{2x} \frac{1}{x} - y' e^{2x} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + y e^{2x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

   Multiplicando por $x^2 e^{-2x}$, queda la EDO lineal de orden 2

$$xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0.$$

2. Encontrar la ecuación diferencial lineal que definen las funciones $f_1 = e^x$, $f_2 = \cos x$, $f_3 = 2e^x - \cos x$.

   En este caso se ve a simple vista que f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2. Ademas, si hacemos el wronskiano de las dos primeras, queda

$$W[f_1, f_2](x) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x \\ e^x & -\text{sen}(x) \end{vmatrix} = -e^x(\cos(x) + \text{sen}(x)) \neq 0,$$

   luego son linealmente independientes. Por tanto, son una base de las soluciones de una EDO lineal y homogénea de orden 2. Calculamos el wronskiano correspondiente

$$\begin{aligned} 0 &= W[y, f_1, f_2](x) = \begin{vmatrix} y & f_1 & f_2 \\ y' & f_1' & f_2' \\ y'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & e^x & \cos x \\ y' & e^x & -\text{sen} x \\ y'' & e^x & -\cos(x) \end{vmatrix} \\ &= -y'' e^x (\text{sen}(x) + \cos(x)) + 2y' e^x \cos(x) + y e^x (\text{sen}(x) - \cos(x)), \end{aligned}$$

y multiplicando por $-e^{-x}$ queda la ecuación

$$y''(\text{sen}(x)+\cos(x))-2y'\cos(x)-y(\text{sen}(x)-\cos(x))=0$$

Se puede reducir el orden de la ecuación si, en vez de homogénea, consideramos una ecuación completa. En este caso, dadas $f_1,\ldots,f_{n+1}$ funciones linealmente independientes, se tiene que $f_1-f_{n+1},\ldots,f_n-f_{n+1}$ son n funciones linealmente independientes que generan el espacio solución de una EDO lineal de orden n

$$a_n(x)(y-f_{n+1})^{n)}+a_{n-1}(x)(y-f_{n+1})^{n-1)}+\cdots+a_0(x)(y-f_{n+1})+b(x)=0,$$

y desarrollando, obtenemos la ecuación completa

$$a_n(x)y^{n)}+a_{n-1}(x)y^{n-1)}+\cdots+a_0(x)y=B(x),$$

donde

$$B(x)=a_n(x)f_{n+1}^{n)}+a_{n-1}(x)f_{n+1}^{n-1)}+\cdots+a_0(x)f_{n+1}-b(x)$$

Ejemplo. De las funciones del ejemplo anterior , $f_1=e^x$, $f_2=\cos x$, $f_3=2e^x-\cos x$, nos quedamos con las linealmente independientes $f_1=e^x$, $f_2=\cos x$, y ahora consideramos la diferencia $g_1=e^x-\cos x$, base del espacio de soluciones de una EDO lineal de orden 1 dada por

$$\begin{aligned} 0 &= W[y,g_1](x)=\begin{vmatrix} y-\cos(x) & g_1 \\ y'+\text{sen}(x) & g_1' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y-\cos(x) & e^x-\cos x \\ y'+\text{sen}(x) & e^x+\text{sen}x \end{vmatrix} \\ &= -(y'+\text{sen}(x))(e^x-\cos(x))+(y-\cos(x))(e^x+\text{sen}(x)), \end{aligned}$$

y desarrollando queda

$$y'(e^x-\cos(x))-y(e^x+\text{sen}(x))=-e^x(\text{sen}(x)+\cos(x))$$

1.9.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Dentro de las ecuaciones lineales se encuentran ecuaciones que modelan una enorme cantidad de fenónemos físicos de gran importancia. Por mencionar uno en concreto, la ecuación de Schrodinger de la mecánica cuántica, de solución desconocida en la actualidad, en una dimensión tiene el aspecto

$$-\frac{h^2}{2m}y''+u(x)y=Ey$$

donde h es la constante de Planck, m la masa, $u(x)$ la energía potencial y E la energía del sistema. Debido a la gran dificultad que supone resolver las ecuaciones lineales en general, nos restringimos a intentar resolver algunas muy concretas entre las que se encuentran las que tienen coeficientes $a_i(x)=a_i$ constantes. Los resultados son análogos a los que se han presentado para ecuaciones de orden 2.

Dada una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x), \tag{29}$$

empezamos por encontrar la base de soluciones de la ecuación homogénea. Para ello calculamos el polinómio característico

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Cuando una raíz real m tiene multiplicidad k genera un subespacion de soluciones de dimensión k

$$y_{H_m} = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1}x^{k-1})e^{mx}.$$

Si la raíz es compleja $m = a+bi$, con multiplicidad k, entonces su conjugada también es raíz con la misma multiplicidad, con lo que la pareja genera un subespacion de soluciones de dimensión $2k$

$$y_{H_m}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{k-1}x^{k-1})e^{ax}\cos(bx) + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{k-1}x^{k-1})e^{ax}\mathrm{sen}(bx).$$

Ejemplo. Resuelva la EDO lineal homogénea $y^{9)} - 2y^{5)} + y' = 0$. En este caso el polinómio característico es

$$p(m) = m^9 - 2m^5 + m$$

la primera raíz se ve a simple vista $m_1 = 0$, y dividiendo por x queda

$$p(m) = m(m^8 - 2m^4 + 1).$$

ahora vemos que el interior del paréntesis es un cuadrado perfecto, con lo que

$$p(m) = m(m^4 - 1)^2$$

De nuevo, dentro del paréntesis tenemos diferencia de cuadrados con lo que queda suma por diferencia

$$p(m) = m(m^2 - 1)^2(m^2 + 1)^2 = m(m-1)^2(m+1)^2(m^2+1)^2,$$

con lo que $p(m)$ tiene las raices $m_1 = 0$ con multiplicidad 1, $m_2 = 1$ y $m_3 = -1$ con multiplicidad 2, y $m_4 = i$, $m_5 = -i$ con multiplicidad 2. Por tanto la solución general será la suma de las soluciones generadas por cada raíz, es decir,

$$y_H(x) = c_0 x + (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x)e^{-x} + (c_5 + c_6 x)\cos(x) + (c_7 + c_8 x)\mathrm{sen}(x),$$

que como vemos tiene 9 coeficientes libres, con lo que genera un espacio vectorial de dimensión 9, que coincide con el orden de la ecuación.

1.9.2 La completa: Método de coeficientes indeterminados

Nos queda pues resolver la ecuación completa. Nos restringimos a ecuciones con término independiente $R(x)$ dado por polinomios, exponenciales, senos y cosenos, o producto de estas. Todas ellas cumplen que $R(x)$, y todas fus derivadas, viven en un espacio vectorial de dimensión finita, llamemoslo CI. Si ese espacio está generado por $R_1(x), \ldots, R_k(x)$, entonces como solución particular probaremos una combinación lineal, pues la ecuación simplemente es ya una combinación lineal de las derivadas. Si el término independiente es solución de la homogénea, se debe probar una potencia de x, determinada por la multiplicidad de la raíz del polinomio característico, por los generadores del CI. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo.

1. Resolver la ecuación diferencial $y^{4)} = \operatorname{sen}(x) + 24$. En este caso, la ecuación homogénea es $y^4 = 0$, cuyo polinomio característico tiene la raíz $m = 0$ de multiplicidad 4, con lo que genera una solución $y_H = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$. Para encontrar una solución particular, vemos que el término independinte junto con todas sus derivadas estan en el espacio vectorial generado por $\operatorname{sen}(x), \cos(x), 1$. Por otro lado 24 es solución de la homogénea, correspondiente a la raíz $m = 0$ con multiplicidad 4, luego probamos una solución del estilo $y_p = a \operatorname{sen}(x) + b\cos(x) + cx^4$, obteniendo al introducirlo en la ecuación $a = 0, b = 1, c = 1$, con lo que la solución general es

$$y_g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \operatorname{sen}(x) + x^4.$$

2. Resolver la ecución diferencial $y^{5)} - 6y^{4)} - 8y^{3)} + 48y'' + 16y' - 96y = xe^x$. En este caso el polinomio característico es $p(m) = m^5 - 6m^4 - 8m^3 + 48m^2 + 16m - 96$. Una raíz es un número que lo hace cero y, para que se haga cero, la parte positiva debe ser igual de grande que la negativa y como tenemos 96 la raíz tiene que ser grande. Si esperamos que sea entera, debe ser un divisor de $96 = 3 \cdot 32$. Descartamos los primeros divisores, y probando con $m = 6$, vemos que es raíz. Dividiendo por $m - 6$ queda, completando cuadrados

$$p(m) = (m-6)(m^4 - 8m^2 + 16) = (m-6)(m^2-4)^2 = (m-6)(m-2)^2(m+2)^2,$$

por tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H = c_0 e^{6x} + (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (c_3 + c_4 x)e^{-2x}$$

El CI del término independiente está generado por $\{e^x, xe^x\}$ y no son solución de la ecuación homogénea, por tanto probamos una solución particular del estilo $y_p = ae^x + bxe^x$ que, metiendolo en la ecuación queda $b = -\frac{1}{45}, a = -\frac{23}{675}$, y la solución general de la ecuación queda

$$y_g(x) = c_0 e^{6x} + (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (c_3 + c_4 x)e^{-2x} - \frac{23}{675}e^x - \frac{1}{45}xe^x.$$

3. Resolver la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' - y = \log x$. Esta es una ecuación equidimensional de Euler que se resuelve con el cambio $x = e^z$, o $z = \log x$, con lo que, si denotamos por $\dot{y} = \frac{dy}{dz}$, entonces por la regla de la cadena se tiene $y' = \dot{y}\frac{dz}{dx} = \dot{y}e^{-z}$, mientras que

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dz}\frac{dz}{dx} = \left(\ddot{y}e^{-z} - \dot{y}e^{-z}\right)e^{-z} = \ddot{y}e^{-2z} - \dot{y}e^{-2z},$$

con lo que queda haciendo el cambio la ecuación

$$\ddot{y} - y = z$$

con polinomio característico $m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$, y por tanto con solución de la homogénea $y_H = c_1e^z + c_2e^{-z}$. Ahora probando un polinomio de orden 1 $y_p = a + bz$ como solución particular, obtenemos al meterlo en la ecuación $-a - bz = z$, con lo que $a = -1, b = 0$, y la solución general es

$$y_g = c_1e^z + c_2e^{-z} - z = c_1x + c_2\frac{1}{x} - \log x.$$

1.10 Sistemas de Ecuaciones lineales de primer orden

A veces para describir un fenómeno más que una función incógnita tenemos un conjunto de funciones. En ese caso las ecuaciones diferenciales que definen el fénomeno forman un sistema del estilo

$$\left.\begin{array}{ccc} y_1' & = & f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \tag{30}$$

Para garantizar la solución de un sistema tenemos el siguiente resultado

Teorema 20 *Si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ y las parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ son contínuas en un recinto R y $a \in R$ es un punto interior, entones existe una única solución al sistema con condiciones iniciales dadas.*

Debe notarse que la solución a un sistema de n ecuaciones es un vector de n componentes, cada una de las funciones $(y_1, \ldots, y_n)$ que resuelven la ecuación.

Ejemplo. El par de funciones $y_1 = \frac{1}{(1-x)^2}$, $y_2 = \frac{1}{1-x}$ resuelven el sistema

$$y_1' = 2y_2^3$$
$$y_2' = y_1$$

junto con las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

Como en las secciones anteriores, resolver un sistema de ecuaciones diferenciales general es un problema muy difícil y, a veces, ni siquiera se sabe como resolver. Así puies, nosotros nos restringimos de nuevo a sistemas lineales, en los que las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son lineales. Concretamente, son los que se pueden escribir como

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n + b_1 \\ y_2' & = & a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n + b_2 \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n' & = & a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n + b_n \end{array}\right\} \tag{31}$$

donde $a_{i,j}$, b_j son funciones de la variable independiente x. En el caso en que estas funciones son contínuas, el Teorema 20 garantiza la solución al problema de Caushy o de condiciones iniciales.

Ejemplo. El par de funciones $y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$, $y_2 = -e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$ resuelven el sistema lineal

$$\begin{aligned} y_1' &= xy_2 + x \\ y_2' &= xy_1 + x \end{aligned}$$

con las condiciones $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -2$.

En muchas ocasiones las funciones que estamos estudiando dependen de manera natural del tiempo, con lo que expresameros la variable independiente por una t en vez de una x. Además si el sistema es 2×2 las funciones se pueden expresar por una $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Ejemplo. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x + 4y - t \\ y' &= 2x - y + t \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones vemos que la función $z = x + y$ cumple

$$z' = 3z$$

con lo que $z = k_1 e^{3t}$, con lo que $x = k_1 e^{3t} - y$ y sustituyendo en la segunda ecuación queda

$$y' = -3y + 2k_1 e^{3t} + t$$

que tiene por solución general $y = k_2 e^{-3t} + \frac{1}{3}k_1 e^{3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$, con lo que la solución al sistema queda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{3t} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Las constantes k_1, k_2 quedarán determinadas una vez que fijemos las condiciones iniciales del problema.

1.10.1 Sistemas y EDOS de orden n. Reducción.

Un sistema que aparece particularmente interesante es al considerar una ecuación de orden n. En este caso el cambio $y_2 = y_1'$,$y_3 = y_2'$,..., $y_n = y_{n-1}'$, nos convierte la ecuación en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\}$$

El Teorema 20 aplicado a los sistemas que provienen de las ecuaciones de orden n queda

Teorema 21 *Si la función y todas sus parciales hasta orden n son contínuas en una región R y a es un punto interior a R, el problema de valores iniciales tiene solución única.*

De hecho, en el caso de sistemas lineales, tener un sistema con n ecuaciones o una ecuación de orden n es lo mismo. Si tenemos el sistema lineal (31) , derivando la primera ecuación respecto de x queda

$$\begin{array}{rcl} y_1'' & = & a_{1,1}'y_1 + a_{1,1}y_1' + a_{1,2}'y_2 + a_{1,2}y_2' + \cdots + a_{1,n}'y_n + a_{1,n}y_n' + b_1' \\ & = & \alpha_{1,1}y_1 + \alpha_{1,2}y_2 + \cdots + \alpha_{1,n}y_n + \beta_1. \end{array} \tag{33}$$

para llegar a la segunda igualdad, hemos sustituido las derivadas por su valor en (31), obteniendo otras funciones nuevas $\alpha_{1,j}, \beta_1$. Utilizando (31) y (33), podemos eliminar y_2 Concretamente en la ecuación $a_{1,2}y_1'' - \alpha_{1,2}y_1'$ no aparece. Calculando las derivadas sucesivas en la primera ecuación, eliminamos todas las variables excepto y_1 que aparecerá con sus derivadas hasta la de orden n.

Ejemplo. Consideramos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 - 2y_2 + y_3 - x \\ y_2' & = & y_1 + y_2 + y_3 + e^x \\ y_3' & = & y_1 - y_2 + 2y_3 + 1 \end{array}\right\} \tag{34}$$

Derivando la primera ecuación queda

$$\begin{array}{rcl} y_1'' & = & 3y_1' - 2y_2' + y_3' - 1 \\ & = & 3(3y_1 - 2y_2 + y_3 - x) - 2(y_1 + y_2 + y_3 + e^x) + y_1 - y_2 + 2y_3 + 1 \\ & = & 8y_1 - 9y_2 + 3y_3 - 3x - 2e^x + 1 \end{array}$$

Multiplicando por 9 la primera ecuacion de (34), y por 2 la ecuación anterior y restando queda

$$2y_1'' - 9y_1' = -11y_1 - 3y_3 + 7x - 4e^x + 2. \tag{35}$$

Derivando de nuevo obtenemos

$$\begin{aligned} 2y_1''' - 9y_1'' &= -11y_1' - 3y_3' + 7 - 4e^x \\ &= -11(3y_1 - 2y_2 + y_3 - x) - 3(y_1 - y_2 + 2y_3 + 1) + 7 - 4e^x \\ &= -36y_1 + 25y_2 - 17y_3 + 11x - 4e^x + 4 \end{aligned}$$

Multiplicando por 25 la primera ecuacion de (34), y por 2 la ecuación anterior y sumando queda

$$4y_1''' - 18y_1'' = 3y_1 - 9y_3 - 14x - 4e^x + 4$$

Multiplicando ahora por 9 la ecuación (35) y por 3 la ecuación anterior y restando queda

$$12y_1''' - 72y_1'' + 81y_1' - 108y_1 = 24e^x - 105x - 6$$

que es una ecuación lineal homogénea de orden 3.

Es posible que el sistema no esté completamente acoplado. es decir, que no todas las funciones aparezcan en todas las ecuaciones. En ese caso cogeremos un subsistema completamente acoplado, lo resolvemos, y sustituimos la solución en las ecuaciones restantes. Veamos un ejemplo sencillo

Ejemplo. Resuelve el sistema

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 + 1 \\ y_2' &= y_2 + e^x \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

En este caso la segunda ecuación está desacoplada y podemos resolverla individualmente obtetiendo la solucion $y_2 = c_1e^x + xe^x$ que, sustituida en la primera ecuación da

$$y_1' = 3y_1 - 2c_1e^x - 2xe^x + 1$$

que es una EDO lineal de orden 1 que se puede resolver por el método de coeficientes indeterminados obteniendo

$$y_1 = c_2e^{3x} - 2(c_1 - 1)e^x - 2xe^x + x$$

Así pues en este caso la solución queda

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} + \begin{pmatrix} 2e^x - 2xe^x + x \\ xe^x \end{pmatrix}$$

1.10.2 Solución general de un sistema lineal.

Teniendo en cuenta que los sistemas de orden n, y las ecuaciones de orden n son básicamente lo mismo, para resolver un sistema seguimos el mismo programa que hicimos en las ecuaciones encontrando primero la solución general del sistema homogéneo, para luego encontrar una solución particular del completo. Por conveniencia en la escritura a partir de este punto vamos a utilizar la notación matricial para escribir un sistema lineal. Es inmediato ver que el sistema lineal (31) se puede representar de forma matricial como

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{37}$$

donde $A(x) \in M_{n\times n}$ es una matriz y $B(x) \in M_{n\times 1}$, un vector, cuyos coeficientes son funciones de la variables independiente, y si son contínuas, el Teorema 20 garantiza la existencia de solución única dadas unas condiciones iniciales.

Definición 22 *Decimos que el sistema (37) es homogéneo si $B(x) = 0$. Se dice que el sistema es completo en otro caso.*

Paso 1: El sistema homogéneo.

Teniendo en cuenta el Teorema 20, y análogamente al caso de ecuaciones tenemos

Corolario 23 *El conjunto de soluciones del Sistema 37 homogéneo tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n.*

Así pues tenemos que buscar n soluciones linealmente independientes. De nuevo, como en el caso de las ecuaciones de orden n la independencia lineal de las soluciones viene dada por el wronskiano.

Definición 24 *Dados n vectores $\overline{f_1}, \ldots \overline{f_n} \in \mathbb{C}(x)^n$ de funciones se define el wronskiano como el determinante*

$$W[\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}](x) = \left|\overline{f_1}(x), \ldots, \overline{f_n}(x)\right|$$

Proposición 25 *n funciones vectoriales $\overline{f_1}, \ldots \overline{f_n} \in \mathbb{C}(x)^n$ son linealmente independientes si y solo si $W[\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}](x) = \left|\overline{f_1}(x), \ldots, \overline{f_n}(x)\right| \neq 0$.*

Ejemplo. Las funciones vectoriales $\overline{f_1}(x) = \begin{pmatrix} -2e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \overline{f_2}(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes ya que

$$W[\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}](x) = \begin{pmatrix} -2e^x & e^{3x} \\ e^x & 0 \end{pmatrix} = -e^{4x} \neq 0.$$

Definición 26 *Dadas n soluciones linealmente independientes del sistema lineal (37) homogéneo la matriz que las tiene por columnas $Y(x) = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n})$ se le llama matriz fundamental.*

Corolario 27 *Si $\Phi(x)$ es una matriz fundamental del Sistema homogéneo (37), la solución general viene dada por $Y(x) = \Phi(x)C$ donde $C \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ son constantes arbitrarias.*

Ejemplo. Ya vimos que el sistema (32) tiene por matriz fundamental

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{3t} & -e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Paso 2: El sistema completo. Una vez tenemos una matriz fundamental del sistema homogéneo, debemos encontrar una solución del completo. Un método que funciona en general es, como en las ecuaciones, el método de variación de las constantes. Dada una matriz fundamental $\Phi(x)$, probamos una solución particular del estilo $Y = \Phi(x)C(x)$, donde $C(x) \in M_{n(C(x)}$ son funciones diferenciables. En ese caso, para que sea solución del sistema completo se debe cumplir

$$\Phi'(x)C(x) + \Phi(x)C'(x) = A(x)\Phi(x)C(x) + B(x)$$

y como $\Phi(x)$ es solución del sistema homogéneo queda

$$C(x) = \int \Phi^{-1}(x)B(x)dx,$$

con lo que una solución particular será

$$Y_p(x) = \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)B(x)dx,$$

y la solución general es

$$Y_H(x) = \Phi(x)C + \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)B(x)dx.$$

Ejemplo. Siguiendo con el Sistema (32), queda

$$\begin{aligned} \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt &= \int \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ -\frac{1}{3}e^{3t} & \frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 0 \\ te^{3t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9}e^{3t}(3t-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y multiplicando por $\Phi(t)$ queda

$$\Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)dt = \begin{pmatrix} -\frac{t}{3} + \frac{1}{9} \\ \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

con lo que recuperamos la solución general del sistema

$$\begin{aligned} Y_H(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{3t} & -e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{t}{3} + \frac{1}{9} \\ \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \end{pmatrix} \\ &= k_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{3t} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.10.3 Sistemas lineales con coeficientes constantes

Así pues para resolver el sistema homogéneo debemos encontrar una matriz fundamental. En general puede ser muy difícil pero, como en el caso de las ecuaciones de orden n, si nos restringimos a sistemas con coeficientes constantes, podemos dar un método general que resuelve el problema. Así pues, en este caso estamos tratando un sitema del estilo

$$Y' = AY + B(x) \tag{38}$$

donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz con coeficientes constantes.

Paso 1. El sistema homogéneo. Como en el caso de las ecuaciones de orden n probamos una solucíon del estilo $Y = ve^{mt}$, donde $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ es un vector de n coordenadas como en (32) y $m \in R$ es una raíz del polinomio característico del sistema. Efectivamente, si metemos en el sistema $Y' = AY$ un vector $Y = ve^{mt}$ queda que m debe ser solución de

$$mY = AY,$$

o bien denotando por $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz identidad, queda

$$0 = (A - mI)Y = (A - mI)ve^{mt}$$

que se hace 0 justo cuando m es un autovalor, y v un autovector de la matriz A. Recuerdese que los autovalores no son sino las raices del polinomio caracteristico de la matriz. Así pues, resolver el sistema se reduce a diagonalizar la matriz de coeficientes que lo define.

Caso 1. Matriz diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Esto quiere decir que, asociado a cada autovalor tenemos un subesespacio vectorial de autovectores de dimensión que coincide con la multiplicidad del autovalor. Y como autovectores correspondientes a autovalores distintos, son linealmente independientes, tenemos una base de autovectores, con lo que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los autovalores, existe una matriz de autovectores S tal que

$$A = SDS^{-1},$$

donde D es una matriz diagonal formada por los autovalores. Teniendo en cuenta esto, consideramos la matriz $\Phi(x)$ con vectores $f_{i,j}(x) = v_{i,j}e^{m_j x}$ donde m_j es el autovalor j-ésimo, i se mueve entre 1 y la multiplicidad de ese autovalor y $v_{i,j}$ son los autovectores correspondientes a ese autovalor done i se mueve entre 1 su multiplicidad. Para cada $f_{i,j}(x)$ se tiene

$$f'_{i,j}(x) = m_j v_{i,j} e^{m_j x} = A v_{i,j} e^{m_j x} = A f_{i,j}(x),$$

luego es solucióin del sistema. Ademas

$$|\Phi(x)| = e^{m_1+\cdots+m_k}|S| \neq 0,$$

luego es una matriz fundamental, y por tanto la solución general del sistema es $Y(x) = \Phi(x)C$.

Ejemplo. Queremos resolver el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& y+z \\ y' &=& x+z \\ x' &=& x+y \end{array}\right\}$$

Empezamos escribiéndolo en forma de matriz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico de la matriz

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+2+3\lambda = -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Cuando la suma de los coeficientes pares es la de los impares cambiados de signo, es porque -1 es raíz. Por tanto -1 es raíz doble, y 2 raíz simple. Calculamos los autovectores.

$\lambda = 2$ En este caso queda

$$0 = (A-2I)u = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

que tiene por solución $u = (1,1,1)$.

$\lambda = -1$ Ahora nos queda

$$0 = (A-2I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz tiene rango 1, con lo que el núcleo es de dimensión 2, y tiene por solución $v = (1,-1,0)$, $w = (0,1,-1)$.

Así pues la solución general al sistema será

$$y_H(x) = c_1 u e^{2x} + c_2 v e^{-x} + c_3 w e^{-x}.$$

Caso 2. Matriz diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

Es igual que el caso anterior. Simplemente que los autovalores complejos vienen por parejas $\lambda = a \pm bi$, con autovectores $v = v_1 + i v_2 i$ y $\overline{v} = v_1 - v_2 i$, y a la pareja le corresponde la pareja de funciones de la matriz fundamental dada por

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{ax}(v_1 \cos(bx) - v_2 \mathrm{sen}(bx)) \\ f_2(x) &= e^{ax}(v_2 \cos(bx) + v_1 \mathrm{sen}(bx)) \end{aligned}$$

Ejemplo. Queremos resolver el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcc} x' &=& 2x+2y \\ y' &=& 3x+7y-5z \\ x' &=& -x+3y+z \end{array}\right\}$$

En este caso el polinomio característico de la matriz de coeficientes queda

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 7-\lambda & -5 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 48 \\ &= -(\lambda-6)(\lambda^2 - 4\lambda + 8) = -(\lambda-6)(\lambda-(2+2i))(\lambda-(2-2i)) \end{aligned}$$

Calculamos los autovectores

$\lambda = 6$ En este caso queda

$$0 = (A - 6I)u = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

que tiene por solución $u = (2, 4, 2)$.

$\lambda = 2 + 2i$ Basta calcular el autovector asociado a uno de los dos autovalores complejos, pues el otro será el conjugado.

$$0 = (A - 2I)v = \begin{pmatrix} -2i & 2 & 0 \\ 3 & 5-2i & -5 \\ -1 & 3 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

De nuevo jugamos con el 0 de la primera fila, para saber que $(2, 2i, a)$ es ortogonal a la primera fila, ahora ajustamos para que sea ortogonal a la segunda y queda $v = (2, 2i, 2+2i) = (2, 0, 2) + i(0, 2, 2) = v_1 + i v_2$.

Juntando ambos resultados obtenemos como solución general del sistema

$$y_H(t) = c_1ue^{6t} + c_2e^{2t}(v_1\cos(2t) - v_2\mathrm{sen}(2t)) + c_3e^{2t}(v_2\cos(2t) + v_1\mathrm{sen}(2t))$$

La matriz tiene rango 1, con lo que el núcleo es de dimensión 2, y tiene por solución $v = (1, -1, 0)$, $w = (0, 1, -1)$.

Caso 3. La matriz no diagonaliza. Esto quiere decir que la dimensión del subespacio de autovectores asociado a un autovalor concreto es menor que la multiplicidad del autovalor. En este caso si la multiplicidad es k, y la dimensión del espacio (multiplicidad geométrica) es $m < k$, debemos multiplicar por un polinomio de grado $k - m$ para ajustar la dimensión. Concretamente, si v_0 es un autovector, y tenemos r vectores tal que $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$, entonces cualquier función del estilo

$$f(x) = e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}x^j v_{l-j}$$

para $0 \leq l \leq r$ es solución del sistema. Efectivamente

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{(j-1)!}x^{j-1}v_{l-j}e^{\lambda x} + \lambda\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}x^j v_{l-j}e^{\lambda x} \\ &= \frac{1}{l!}x^l\lambda v_0 e^{\lambda x} + \sum_{j=0}^{l-1}\frac{c_{j+1}}{j!}x^j(v_{l-1-j} + \lambda v_{l-j})e^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$= Af(x).$$

Ejemplo. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcc} x' &=& 3x + y + z \\ y' &=& -2x + 6y + 2z \\ x' &=& x - y + 3z \end{array}\right\}$$

En este caso

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda - 4)^3 \end{aligned}$$

Para calcular los autovectores vemos que

$$0 = (A - 4I)u = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1 y dos vectores linealmente independientes pertenecen al núcleo. Concretamente $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, -1)$. Ademas, tomando cualquier vector linealmente independiente a estos dos, por ejemplo $w = (1, 0, 0)$ queda

$$(A - 4I)w = (-1, -2, 1) = -(u + v)$$

Por tanto tomamos como autovector $v_0 = -(u + v)$, $v_1 = w = (1, 0, 0)$ y otro autovector, linealmente independiente con v_0, por ejemplo u, y tenemos la solución general del sistema homogéneo

$$y_H(t) = c_1 u e^{4t} + c_2 v_0 e^{4t} + c_3 (v_1 + v_0 t) e^{4t}.$$

1.10.4 Método de coeficientes indeterminados.

Nos falta encontrar una solución para el sistema completo. Para los sistemas lineales ya tenémos el método de variación de constantes, un método general para determinar una solución particular a partir de una matriz fundamental. En el caso de sistemas lineales con coeficientes constantes, y término independiente dado por polinomios senos, cosenos o exponenciales, o productos de estas funciones, tenemos el método de coeficientes indeterminados, análogo al que vimos para ecuaciones de orden n. En este caso el término independiente y sus derivadas generan un espacio vectorial de dimensión finita, y se trata de probar un elemento de este espacio vectorial.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ -te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Empezamos resolviendo el sistema homogéneo. Para ello diagonalizamos la matriz de coeficientes. El polinomio característico queda

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \end{aligned}$$

con raices $\lambda = 2$, y $\lambda = 1 \pm i$

$\lambda = 2$ En este caso queda

$$0 = (A - 2I)u = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

que tiene por solución $u = (1, 1, 0)$.

$\lambda = 1+i$ Ahora nos queda

$$0 = (A-(1+i)I)v = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & -1 \\ -1 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

que tiene por solución $v = (1, i, i+1) = (1,0,1) + i(0,1,1)$,

Así pues la solución general al sistema será

$$y_H(t) = c_1 u e^{2t} + c_2(e^t(v_1 \cos(t) - v_2 \mathrm{sen}(t)) + c_3 e^t (v_2 \cos(t) + v_1 \mathrm{sen}(t)).$$

Para obtener la solución particular probamos una del estilo $Y_p(t) = (w_1 + w_2 t)e^{-t}$. Al introducirla en el sistema queda

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= Aw_1 + B_0 \\ -w_2 &= Aw_2 + B_1 \end{aligned}$$

donde A es la matrix de coeficientes, y el término independiente esta escrito como $(B_0 + B_1 t)e^{-t}$, es decir $B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De la segunda ecuación obtenemos

$$w_2 = -(A+I)^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras que de la primera ecuación vemos que

$$w_1 = (A+I)^{-1}(w_2 - B_0) = \begin{pmatrix} -\frac{34}{45} \\ -\frac{7}{45} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Así pues, la solución general al sistema completo queda

$$Y_G(t) = c_1 u e^{2t} + c_2(e^t(v_1 \cos(t) - v_2 \mathrm{sen}(t)) + c_3 e^t (v_2 \cos(t) + v_1 \mathrm{sen}(t)) + (w_1 + w_2 t)e^{-t}.$$